1789

De motu oscillatorio tabulae suspensae et a vento agitatae

Leonhard Euler

DE MOTV OSCILLATORIO TABVLAE SVSPENSAE ET A VENTO AGITATAE.

Auctore
L. EVLERO.

Conuent. exhib. die 13 *Nou.* 1775.

§. 1.

Consideremus tabulam planam circa axem horizontalem suspensam, in quam ventus impingat secundum directionem horizontalem V S sitque recta A O verticalis, axis vero circa quem tabula A S est mobilis, ad planum A O V normalis concipiatur; in tabula autem sit G eius centrum grauitatis. Tum vero ponatur pondus totius tabulae $= \mathrm{P}$, eiusque momentum inertiae respectu axis $\mathrm{A} = \mathrm{P}\, k\, k$, quod obtinetur si singula tabulae elementa per quadrata distantiarum suarum ab axe A multiplicentur et producta in vnam summam colligantur. Vocetur porro distantia centri grauitatis ab axe $\mathrm{A\,G} = a$, pro figura autem tabulae, cuius recta A B sit diameter, distantiae indefinitae $\mathrm{A\,S} = s$ ponatur semilatitudo $= y$, ita vt superficies tabulae abscissae A S respondens sit $2 \int y\, \partial s$; tota vero tabulae longitudo A B sit $= b$. Denique vocetur celeritas venti in directione $\mathrm{V\,S} = c$, denotante c spatium quod ventus singulis minutis secundis percurrit. Tab. III. Fig. 1.

§. 2. His factis denominationibus, postquam ab initio elapsum fuerit tempus t minut. secund., teneat tabula situm in figura expressum A B, a recta verticali A O declinantem angulo $OAB = \Phi$; motus autem tabulae nunc sit tantus, vt punctum G circa axem A gyretur in directione G g ad A G normali celeritate $= v$, ita vt ad quoduis tempus t istam celeritatem inuestigari oporteat. Hinc igitur puncti cuiuscunque S ab axe distantis interuallo $AS = s$ celeritas erit $= \frac{vs}{a}$, cuius directio S P itidem erit ad axem normalis.

§. 3. Quoniam igitur tabula in motu versatur, ante omnia motus respectiuus venti, quo in punctum tabulae S impingit, definiri debet. Hunc in finem motus secundum S P resoluatur in laterales S Q et S R, illum scilicet horizontalem, hunc vero verticalem; et quia angulus $ASR = \Phi = PSQ$, ob celeritatem $SP = \frac{vs}{a}$, erit celeritas $SQ = \frac{vs}{a} \operatorname{cos}. \Phi$ et celeritas $SR = \frac{vs}{a} \operatorname{sin}. \Phi$; vnde patet ventum in directione horizontali S Q punctum S tantum ferire celeritate $c - \frac{vs}{a} \operatorname{cos}. \Phi$.

Tab. III. Fig. 2. §. 4. Referat igitur $S v$ istam celeritatem respectivam venti horizontalem $c - \frac{vs}{a} \operatorname{cos}. \Phi$, et quia punctum S insuper habet celeritatem $SR = \frac{vs}{a} \operatorname{sin}. \Phi$, toti systemati motus contrarius imprimi concipiatur, sumendo $Sr = \frac{vs}{a} \operatorname{sin}. \Phi$, et completo rectangulo $S v T r$, diagonalis S T tam directionem quam quantitatem celeritatis repraesentabit, qua ventus in punctum S vt fixum spectatum impinget. Ponatur igitur angulus $TSr = \psi$, eritque $\operatorname{tang}. \psi = \frac{Tr}{Sr} = \frac{ac - vs \operatorname{cos}. \Phi}{vs \operatorname{sin}. \Phi}$, et ipsa celeritas

$$ST = \sqrt{\left(cc - \frac{2cvs \operatorname{cos}. \Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}\right)}.$$

Tab. III. Fig. 3. §. 5. Referat S T istam celeritatem modo inuentam, quae producta rectae verticali A O occurrat in puncto U, fietque

que angulus TUO $= \psi$, et ventus eodem modo punctum S feriet ac si veniret in directione US celeritate

$$= \sqrt{cc - \frac{2cvs\,\text{cos}.\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{a}}.$$

Hinc igitur ob angulum BAO $= \Phi$, obliquitas incidentiae erit angulus ASU $= \psi - \Phi$, eius ergo tangens erit

$$= \frac{\text{tang}.\,\psi - \text{tang}.\,\Phi}{1 + \text{tang}.\,\psi\,\text{tang}.\,\Phi} = \frac{ac\,\text{cos}.\,\Phi - vs}{ac\,\text{sin}.\,\Phi},$$

vnde erit huius anguli sinus

$$= \text{sin}.\,(\psi - \Phi) = \frac{ac\,\text{cos}\,\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,\text{cos}.\,\Phi + vvss)}} \text{ et}$$
$$\text{cos}.\,(\psi - \Phi) = \frac{ac\,\text{sin}.\,\Phi}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,\text{cos}.\,\Phi + vvss)}}.$$

§. 6. Ista resolutio etiam sequenti modo concinnius institui potest; resoluatur scilicet ipse motus venti VS, completo rectangulo VASN, secundum directiones AS et NS, quarum haec sit normalis in tabulam, illa autem ipsam tabulam stringat. Quia igitur celeritas venti VS$=c$ et angulus VSN $=$ OAS $= \Phi$, erit celeritas secundum AS $= c$ sin. Φ, et celeritas secundum NS $= c$ cos. Φ, quam posteriorem punctum S quasi effugit celeritate $= \frac{vs}{a}$, quamobrem a celeritate NS rescindatur portio N$n =$ SP $= \frac{vs}{a}$, ac referet S$n = c$ cos. $\Phi - \frac{vs}{a}$ hanc celeritatem, qua punctum S percutietur, quae ergo cum altera celeritate secundum AS $= c$ sin. Φ iterum coniungatur, ducendo nv parallelam ipsi NV. Tum enim diagonalis vS dabit motum venti respectu puncti S quiescentis; nunc igitur erit S$v = \sqrt{(\text{S}n^2 + nv^2)} = \sqrt{cc - \frac{2cvs\,\text{cos}.\,\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}}$, vnde statim colligitur sinus incidentiae Tab. III. Fig. 4.

$$\text{VSA} = \frac{ac\,\text{cos}.\,\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs\,\text{cos}.\,\Phi + vvss)}},$$

prorsus vt iam ante inuenimus.

§. 7. Ventus igitur in punctum tabulae motae S perinde agit, ac si tabula quiesceret ventusque impingeret in directione vS cum celeritate $= \sqrt{cc - \frac{2cvs\,cos.\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}}$, vnde totum effectum venti in tabulam determinari oportet. Olim quidem Newtonum sequentes Geometrae statuerunt in impulsione fluidi obliqua impetum sequi rationem duplicatam sinuum; nuper autem ex experimentis Cel. Marguerie *in Mém. de l'Académ. R. de Marine* commemoratis concludendum videtur, istum impetum ipsi sinui anguli incidentiae esse proportionalem, quam ob caussam motum nostrae tabulae pro vtraque hypothesi seorsim euoluamus, quo deinceps, quando experimenta instituentur, facilius cognosci possit, vtra harum hypothesium ad veritatem propius accedat.

HYPOTHESIS I
qua impulsio fluidi quadrato sinus anguli incidentiae proportionalis statuitur.

§. 8. Cum igitur elementum tabulae elemento abscissae ∂s respondens sit $= 2y\partial s$, consideremus primo vim venti, si cum celeritate $= u$ directe in hoc elementum quiescens impingeret, et quia altitudo, ex qua ista celeritas u generatur, est $= \frac{uu}{4g}$, denotante g altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, vis impulsionis aequabitur ponderi cylindri aërei cuius basis $= 2y\partial s$, altitudo vero $= \frac{uu}{4g}$, cuius ergo volumen erit $= 2y\partial s \cdot \frac{uu}{4g}$, quod ad volumen aqueum reductum, posita grauitate specifica aëris ad aquam vt 1 ad n, haec vis aequabitur ponderi voluminis aquae $= \frac{2y\partial s \cdot uu}{4ng}$. Nunc igitur quoque totum pondus tabulae P per volumen aquae aequiponderantis exprimi conueniet. Quod si iam ventum eadem celeritate u non directe sed sub angulo $= \omega$ in tabulam irruere

irruere sumamus, eius vis in elementum tabulae $2y\partial s$ exerta erit $= 2y\partial s \cdot \frac{uu}{4ng}$ sin. ω^2. Nunc vero pro nostro casu vidimus esse

$$uu = cc - \frac{2cvs \operatorname{cos}.\Phi}{a} + \frac{vvss}{aa}, \text{ atque}$$

$$\operatorname{sin}.\omega = \frac{ac \operatorname{cos}.\Phi - vs}{\sqrt{(aacc - 2acvs \operatorname{cos}.\Phi + vvss)}};$$

quibus valoribus substitutis prodit vis illa quaesita

$$= \frac{2y\partial s(ac \operatorname{cos}.\Phi - vs)^2}{4ngaa}$$

cuius vis directio est SP ad tabulam AB normalis. Hic autem imprimis notari oportet, istam formulam tantum locum habere, quamdiu declinatio tabulae seu angulus OAB $= \Phi$ minor est angulo recto; si enim angulus Φ excederet $90°$, tum vis venti in tabulam non amplius sursum vergeret vti formula indicat, sed subito in partem contrariam verteretur, quia hoc casu ventus tabulam ab altera parte feriret, vnde cavere debemus, ne sequentes conclusiones vltra situm tabulae horizontalem extendamus.

§. 9. Quo nunc hinc ipsum motum tabulae eruere queamus, quia ea circa axem A est mobilis, singularum harum virium elementarium momenta respectu eiusdem axis colligere debemus, quare vis elementaris inuenta ducatur in distantiam ab axe AS $= s$, vt obtineatur eius momentum

$$= \frac{2ys\partial s(ac \operatorname{cos}.\Phi - vs)^2}{4ngaa},$$

vbi obseruandum est in integratione huius formulae tantum interuallum s indeque pendentem semi-latitudinem tabulae y pro variabili tractari debere, hocque facto post integrationem statui oportet $s = AB = b$, vt obtineatur totum momentum ex omnibus viribus elementaribus natum.

§. 10.

§. 10. Quia autem hinc in genere pro quauis tabulae figura nihil definire licet, tabulae tribuamus figuram rectanguli, cuius semi-latitudo sit $= f$, ideoque $y = f$, et nunc formula nostra integranda erit

$$\frac{2fs\partial s(aacc\cos.\Phi^2 - 2acvs\cos.\Phi + vvss)}{4ngaa},$$

cuius ergo integrale erit

$$\frac{ccfss\cos.\Phi^2}{4ng} - \frac{cfvs^3\cos.\Phi}{3nga} + \frac{fvvs^4}{8ngaa}.$$

Hinc igitur posito $s = b$ totum hoc momentum fiet

$$\frac{bbccf\cos.\Phi^2}{4ng} - \frac{b^3cfv\cos.\Phi}{3nga} + \frac{fb^4vv}{8ngaa}.$$

§. 11. Manifestum autem est hoc momentum ex vi venti natum tendere ad angulum Φ augendum, dum proprium tabulae pondus in plagam contrariam nititur. At vero totum pondus P in ipso centro grauitatis G collectum concipere licet, cuius directio cum sit verticalis, eius momentum respectu axis A erit $= Pa\sin.\Phi$, ita vt nunc excessus illius momenti super hoc sit

$$\frac{bbccf\cos.\Phi^2}{4ng} - \frac{b^3cfv\cos.\Phi}{3nga} + \frac{b^4fvv}{8ngaa} - Pa\sin.\Phi,$$

quod ergo per momentum inertiae Pkk diuisum praebet vim acceleratricem motus angularis; inde vero ipsa acceleratio oritur, si multiplicetur per $2g$, tum enim productum aequabitur ipsi accelerationi, quae est $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2}$, sumto scilicet elemento temporis ∂t constante, ex quo nostra aequatio erit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf\cos.\Phi^2}{2nPkk} - \frac{2b^3cfv\cos.\Phi}{3naPkk} + \frac{b^4fvv}{4naaPkk} - \frac{2ga\sin.\Phi}{kk}.$$

§. 12. In hac aequatione duae insunt variabiles, angulus Φ et celeritas v, quae autem a se inuicem pendent. Cum enim v sit celeritas in puncto G secundum directionem Gg in distantia ab axe $AG = a$, celeritas angularis inde nata erit

erit $= \frac{v}{a}$, quae autem etiam eſt $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$, ita vt ſit $v = \frac{a\partial\Phi}{\partial t}$; hoc ergo valore ſubſtituto nanciſcemur ſequentem aequationem differentialem ſecundi gradus

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf\,\mathrm{coſ.}\Phi^2}{2nPkk} - \frac{2b^3cf\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi}{3nPkk\partial t} + \frac{b^4f\partial\Phi^2}{4nPkk\partial t^2} - \frac{2ga\,\mathrm{ſin.}\Phi}{kk}$$

in qua aequatione nunc duae tantum inſunt variabiles, ſcilicet angulus Φ cum tempore t.

§. 13. Quoniam hic variabilis t ſolum differentiale ∂t occurrit, ea ad differentialem primi gradus reducetur ponendo $\partial\Phi = q\partial t$, ita vt ſit $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = q$ et $\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t} = \partial q$, ex quo fiet

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{\partial q}{\partial t} = \frac{q\partial q}{\partial\Phi} \text{ ob } \partial t = \frac{\partial\Phi}{q};$$

quamobrem aequatio noſtra hanc induet formam

$$q\partial q = \frac{bbccf\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi^2}{2nPkk} - \frac{2b^3cfq\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi}{3nPkk} + \frac{b^4fqq\partial\Phi}{4nPkk} - \frac{2ga\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi}{kk}.$$

Ponatur breuitatis gratia

$$\frac{bbccf}{2nPkk} = \alpha,\quad \frac{2b^3cf}{3nPkk} = \beta,\quad \frac{b^4f}{4nPkk} = \gamma \text{ et } \frac{2ga}{kk} = \delta.$$

vt habeamus hanc aequationem concinniorem:

$$q\partial q = \alpha\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi^2 - \beta q\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi + \gamma qq\partial\Phi - \delta\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi.$$

Nulla autem via patet, qua integrale huius aequationis elici queat.

§. 14. Interim tamen hinc caſum euoluiſſe iuuabit, quo celeritas venti c vehementer magna exiſtit prae motu tabulae, ita vt quantitas v reſpectu c negligi queat; tum enim in prima aequatione §. 9. data loco $(ac\,\mathrm{coſ.}\Phi - vs)^2$ ſcribere licebit $aacc\,\mathrm{coſ.}\Phi^2$, vnde calculo vt ante ſubducto termini litteris β et γ affecti praetermitti poterunt, ita vt tantum habeatur iſta aequatio:

$$q\partial q = \alpha\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\Phi^2 - \delta\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi = \tfrac{1}{2}\alpha\partial\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha\partial\Phi\,\mathrm{coſ.}\,2\Phi$$
$$- \delta\partial\Phi\,\mathrm{ſin.}\Phi,$$

cuius integrale eſt

$$qq = \alpha\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha \,\text{ſin.}\, 2\Phi + 2\delta \,\text{coſ.}\, \Phi + C,$$

hincque porro fit

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{(\alpha\Phi + \tfrac{1}{2}\alpha \,\text{ſin.}\, 2\Phi + 2\delta \,\text{coſ.}\, \Phi + C)},$$

vbi $\frac{\partial\Phi}{\partial t}$ exprimit celeritatem angularem tabulae elapſo tempore $= t$. Ponamus igitur initio tabulam in ſitu verticali A O quieviſſe ita vt initio fuerit $\frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0$, et conſtans C reperietur $= -2\delta$, ita vt nunc habeamus

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \sqrt{\alpha\Phi + \alpha \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - 2\delta(1 - \text{coſ.}\, \Phi)}.$$

Atque hinc fiet

$$\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(\alpha\Phi + \alpha \,\text{ſin.}\, \Phi \,\text{coſ.}\, \Phi - 2\delta(1 - \text{coſ.}\, \Phi))}}.$$

Neque vero hinc tempus per quantitates in calculo receptas exprimi poteſt.

§. 15. Aſſumamus autem porro pondus tabulae tantum eſſe, vt agitationes a vento ortae ſint quam minimae, ita vt loco ſin. Φ ſcribere liceat Φ et loco coſ. Φ, 1 vel ad ſummum $1 - \frac{1}{2}\Phi\Phi$; hoc igitur caſu erit

$$\partial t = \frac{\partial\Phi}{\sqrt{(2\alpha\Phi - \delta\Phi\Phi)}}.$$

Ponatur hic $\Phi = zz$ vt habeamus

$$\partial t = \frac{2\,\partial z}{\sqrt{(2\alpha - \delta zz)}} \text{ ſiue } \partial t\sqrt{\delta} = \frac{2\,\partial z}{\sqrt{(\frac{2\alpha}{\delta} - zz)}},$$

cuius integrale eſt

$$t\sqrt{\delta} = 2\,\text{A ſin.}\, \frac{z\sqrt{\delta}}{\sqrt{2\alpha}} = 2\,\text{A ſin.}\, \frac{\sqrt{\delta\Phi}}{\sqrt{2\alpha}},$$

ita vt ſumto $\Phi = 0$ fiat etiam $t = 0$.

§. 16. Ab initio ergo huius motus angulus Φ creſcet, donec fiat $\frac{\sqrt{\delta\Phi}}{\sqrt{2\alpha}} = 1$ ideoque $\Phi = \frac{2\alpha}{\delta}$; quae ergo eſt maxima ex-

excursio tabulae a situ verticali, et contingit elapso tempore $t = \frac{\pi}{\sqrt{\delta}}$; inde igitur delabetur rursus ad situm verticalem, vnde rursus simili modo ascendet, et tali motu reciproco perpetuo agitabitur. Cum igitur sit $\alpha = \frac{bbccf}{2nPkk}$ et $\delta = \frac{2ga}{kk}$, angulus maximae excursionis erit $\Phi = \frac{bbccf}{2agnP}$; tempus autem quo hic angulus absoluitur erit $t = \frac{\pi k}{\sqrt{2ga}}$, quod simul est tempus vniuscuiusque oscillationis; vbi recordandum est esse $AG = a$, $b = AB$, f semilatitudinem tabulae, c celeritatem venti seu viam ab eo minuto secundo percursam, g altitudinem lapsus grauium vno minuto secundo, P volumen aquae cuius pondus ponderi aquae aequatur, numerum n vero denotare quoties aqua grauior aëre, ita vt propemodum sit $n = 850$; denique autem Pkk denotat momentum inertiae tabulae respectu axis suspensionis.

§. 17. In hoc motu oscillatorio praecipue obseruari conuenit, tempus oscillationis neque a celeritate venti, neque a pondere tabulae pendere, sed tantum per quantitates k et a determinari, ita vt eadem tabula perpetuo eundem motum oscillatorium accipere debeat, siue ventus fuerit fortior siue debilior, dummodo oscillationes maneant quam minimae: necesse enim est vt angulus Φ non aliquot gradus excedat, siue vt fractio $\frac{bbccf}{2ngaP}$ non superet partem decimam vnitatis.

§. 18. Quo hunc motum exemplo illustremus, habeat tabula figuram parallelogrammi rectanguli, quae circa axem aAa sit mobilis, in cuius medio G sit centrum grauitatis, ita vt sit $AB = 2AG$ siue $b = 2a$; tum vero sit semilatitudo huius tabulae $Aa = f$ crassities vero $= d$, eritque volumen totius tabulae $= 4afd$, vnde si grauitas specifica tabulae se habeat ad aquam vt m ad 1, erit $P = 4mafd$. Hinc igitur pro momento inertiae inueniendo capiatur altitudo indefinita $AP = x$ Tab. III. Fig. 5.

 sitque

ſitque $Pp = \partial x$, erit volumen elementi tabulae $MMmm = 2\,d\,f\,\partial x$, eiusque maſſa $2\,m\,d\,f\,\partial x$; quae multiplicata per quadratum diſtantiae ab axe ſcilicet $x\,x$ et integrata dat $\frac{2}{3}\,m\,d\,f\,x^3 = \frac{16}{3}\,m\,d\,f\,a^3$, quod cum poſitum ſit $= P\,k\,k$, ob $P = 4\,m\,a\,f\,d$ fiet $k\,k = \frac{3}{4}\,a\,a$. Ex his igitur colligitur tempus vnius oſcillationis $t = \frac{2\pi\sqrt{a}}{\sqrt{6g}}$ in minutis ſecundis expreſſum, dummodo angulus excurſionis qui fit $\Phi = \frac{cc}{2\,m\,n\,g\,d}$ fuerit ſatis exiguus, veluti non ſuperans $\frac{1}{10}$.

§. 19. Manifeſtum eſt iſtum motum oſcillatorium locum habere non poſſe, niſi vel tabula fuerit tam ponderoſa vel ventus ſatis debilis, vt tabulam de ſitu verticali non vltra angulum ſatis exiguum veluti 5 graduum declinare valeat. Quod ſi ſecus eueniat et tabula a vento vsque ad angulum maiorem declinetur, tum nihilo minus etiam motus oſcillatorius locum habere poteſt, dum ſcilicet tabula circa ſitum obliquum in quo cum vento in aequilibrio foret, vltrocitroque per intervalla minima agitabitur, quem motum operae pretium erit accuratius inueſtigare.

De motu oſcillatorio quem tabula a vento impulſa recipere poteſt in Hypotheſi I.

Tab. III. Fig. 6. §. 20. Hic igitur ante omnia ex dimenſionibus tabulae, quae maneant vt ſupra ſunt conſtitutae, et vi venti definiri debet ſitus tabulae obliquus, qui ſit A B, in quo cum vento in aequilibrio conſiſtat. Statuatur ergo angulus $OAB = \zeta$, ita vt angulus ſub quo ventus in tabulam impingit ſit $= 90° - \zeta$; quare cum altitudo celeritati venti debita ſit $= \frac{cc}{4g}$ et ſuperficies tabulae $= 2\,b\,f$; vis venti tota aequabitur ponderi voluminis

nis aquae $= \frac{cc}{4ng} \cdot 2bf \operatorname{cof.} \zeta^2$, quae in puncto tabulae medio applicata est intelligenda, vnde eius momentum respectu axis erit $\frac{bbccf \operatorname{cof.} \zeta^2}{4ng}$. Momentum autem ponderis tabulae est $= P a \operatorname{fin.} \zeta$, quod illi aequale positum dabit statum aequilibrii hac aequatione expressum $P a \operatorname{fin.} \zeta = \frac{bbccf \operatorname{cof.} \zeta^2}{4ng}$, vnde angulum ζ definire licebit, quem ergo tanquam cognitum spectabimus, ita vt hinc potius relatio reliquorum elementorum deduci queat.

§. 21. Quod si iam tabulam de hoc statu aequilibrii a caussa quacunque tantillum deturbari concipiamus, ea vtique circa hunc situm vtrinque excursiones quam minimas peraget, hocque modo motu oscillatorio agitabitur, ad quem determinandum ponamus, elapso tempore t peruenisse in statum A b existente angulo O A $b = \Phi$, et quia motus ipsius tabulae prae celeritate venti vt infinite paruus spectari potest, aequatio finalis supra pro acceleratione §. 11. inuenta ad hunc casum accommodabitur, si ibi ponatur $v = 0$, vnde nanciscemur sequentem aequationem

$$\frac{\partial \partial \Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf \operatorname{cof.} \Phi^2}{2nPkk} - \frac{2ga \operatorname{fin.} \Phi}{kk}.$$

Vbi notandum est, angulum Φ quam minime esse discrepaturum ab angulo ζ, qui statui aequilibrii conuenit, quamobrem si ponamus $\Phi = \zeta + \omega$, erit

$$\operatorname{fin.} \Phi = \operatorname{fin.} \zeta + \omega \operatorname{cof.} \zeta \text{ et}$$

$$\operatorname{cof.} \Phi^2 = \operatorname{cof.} \zeta^2 - 2\omega \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta,$$

tum vero $\partial \partial \Phi = \partial \partial \omega$ ob ζ constans, vnde ista aequatio emergit:

$$\frac{\partial \partial \omega}{\partial t^2} = \frac{bbccf \operatorname{cof.} \zeta^2}{2nPkk} - \frac{bbccf \omega \operatorname{fin.} \zeta \operatorname{cof.} \zeta}{nPkk} - \frac{2ga \operatorname{fin.} \zeta}{kk} - \frac{2ga\omega \operatorname{cof.} \zeta}{kk},$$

ex qua ergo aequatione ad quoduis tempus t angulum B A $b = \omega$ inuestigare oporteat.

§. 22. Cum igitur ex ſtatu aequilibrii ſit

$$P\,a\,\sin.\zeta = \frac{b\,b\,c\,c\,f\,\cos.\zeta^2}{4\,n\,g},$$

aequatio noſtra contrahetur in hanc formam ſatis concinnam:

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = -\frac{b\,b\,c\,c\,f\,\omega\,\sin.\zeta\,\cos.\zeta}{n\,r\,k\,k} - \frac{2\,g\,a\,\omega\,\cos.\zeta}{k\,k},$$

ſiue ob $b\,b\,c\,c\,f\,\cos.\zeta = \frac{4\,g\,a\,\sin.\zeta}{k\,k\,\cos.\zeta}$ erit

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = -\frac{4\,g\,a\,\omega}{k\,t\,\cos.\zeta} + \frac{2\,g\,a\,\omega\,\cos.\zeta}{k\,k} = -\frac{2\,g\,a\,\omega}{k\,k\,\cos.\zeta}\,(2 - \cos.\zeta^2)$$

ideoque

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = -\frac{2\,g\,a\,\omega}{k\,k\,\cos.\zeta}\,(1 + \sin.\zeta^2),$$

quae aequatio cum conueniat omni motui oſcillatorio, ex ea ſtatim patet longitudinem penduli ſimplicis iſochromi eſſe $= \frac{k\,k\,\cos.\zeta}{2(1+\sin.\zeta^2)}$.

§. 23. Ponamus breuitatis gratia $\frac{2\,g\,a\,(1+\sin.\zeta^2)}{k\,k\,\cos.\zeta} = \lambda$, vt habeamus $\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = -\lambda\,\omega$, quae aequatio per $2\,\partial\,\omega$ multiplicata et integrata praebet $\frac{\partial\,\omega^2}{\partial t^2} = \lambda\,(\alpha\,\alpha - \omega\,\omega)$, denotante $\alpha\,\alpha$ conſtantem per integrationem introducendam. Hinc igitur porro fiet $\partial\,t\,\sqrt{\lambda} = \frac{\partial\,\omega}{\sqrt{(\alpha\,\alpha - \omega\,\omega)}}$ et integrando $t\,\sqrt{\lambda} = A\,\sin.\,\frac{\omega}{\alpha}$, hincque viciſſim $\omega = \alpha\,\sin.\,t\,\sqrt{\alpha}$; hinc patet, tabulam ad maximam digreſſionem peruenire, vbi ſit $t\,\sqrt{\lambda} = 90° = \frac{\pi}{2}$, ideoque elapſo tempore $t = \frac{\pi}{2\sqrt{\lambda}}$, quod cum ſit tempus dimidiae oſcillationis, euidens eſt, tempus cuiusque oſcillationis fore

$$\frac{\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\pi\,k\,\sqrt{\cos.\zeta}}{\sqrt{2\,g\,a\,(1+\sin.\zeta^2)}}$$

in minutis ſecundis expreſſum, vbi angulum ζ definiri oportet ex hac aequatione

$$P\,a\,\sin.\zeta = \frac{b\,b\,c\,c\,f\,\cos.\zeta}{4\,n\,g}.$$

§. 24.

§. 24. Applicemus haec ad tabulam rectangularem supra descriptam, cuius altitudo erat A B $= b = 2a$, semilatitudo $= f$, craſſities $= d$, et grauitas ſpecifica reſpectu aquae $= m$, vnde deduximus $P = 4 m a f d$ et $k k = \frac{4}{3} a a$, ex quibus valoribus naſcitur iſta aequatio $4 m d \text{ſin.} \zeta = \frac{c c \text{coſ.} \zeta^2}{n g}$, ex qua angulum ζ quaeri oportet, vel ſi hunc angulum vt cognitum ſpectare velimus, hinc celeritatem venti iſtum angulum producentem cognoſcemus, cum ſit $c c = \frac{4 m n g d \text{ſin.} \zeta}{\text{coſ.} \zeta^2}$, tum autem tempus ſingularum oſcillationum erit

$$\frac{2 \pi a}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{\text{coſ.} \zeta}{2 g a (1 + \text{ſin.} \zeta^2)}} = \pi \sqrt{\frac{2 a \text{coſ.} \zeta}{3 g (1 + \text{ſin.} \zeta^2)}},$$

quod tempus poſito angulo $\zeta = 0$ cum eo quod ſupra §. 18. invenimus egregie conuenit. Ceterum patet, hunc motum oſcillatorium maxime pendere a celeritate venti, quandoquidem angulus praecipue per vim venti determinatur. Praeterea vero euidens eſt, oſcillationes continuo magis fieri rapidas, quo maior prodierit angulus ζ, ac ſi fieri poſſet vt angulus ζ euaderet rectus, tempus cuiusque oſcillationis adeo euaneſceret. Quando igitur angulus ζ ſatis prope ad 90° accedit, ita vt numerus vibrationum vno minuto ſecundo editarum fiat ſatis magnus, neceſſe eſt, vt inde aliquis ſonus et ſtrepitus audiatur, prorſus vti experientia declarat.

HYPOTHESIS II.

qua impulſio fluidi ſinui anguli incidentiae proportionalis ſtatuitur.

Vbi potiſſimum motus oſcillatorius expenditur.

§. 25. Euoluamus primo formulam pro determinatione motus cuiuscunque in genere, atque manentibus omnibus vt in hypotheſi praecedente, erit vis qua elementum tabulae $2 y \partial s$ im-

impellitur

$$2y\,\partial s\,.\,\frac{uu}{4ng}\,\text{fin.}\,\omega = \frac{2y\partial s(acc\,\text{cof.}\,\Phi - vs)\sqrt{aacc - 2acvs\,\text{cof.}\,\Phi + vvss}}{4ngaa},$$

vbi notandum eſt, hanc formulam quoque veritati conſentaneam manere, etiamſi angulus Φ vltra 90° augeatur, quoniam ob coſ. Φ negatiuum iſta vis ſponte in plagam contrariam dirigitur. Huius igitur vis momentum erit

$$\frac{2ys\partial s(acc\,\text{cof.}\,\Phi - vs)\sqrt{aacc - 2acvs\,\text{cof.}\,\Phi + vvss}}{4ngaa},$$

cuius autem integrale in genere multo minus quam caſu praecedente euolui poteſt. Etiamſi autem longitudinem tabulae conſtantem aſſumamus et ponamus vt ante $y = f$, nihilo minus integrale prodibit nimis perplexum, ita vt hinc circa motum tabulae in genere nihil definiri queat.

§. 26. Hanc ob rem ſtatim inueſtigationem iſtam ad motus tabulae minimos ſeu oſcillatorios accommodemus, ita vt ipſa tabulae celeritas in puncto G, quae poſita erat $= v$, pro nihilo reputari poſſit; tum autem illud momentum elementare ſumto $y = f$ erit $2fs\,\partial s\,.\,\frac{cc\,\text{cof.}\,\Phi}{4ng}$, cuius integrale per totam tabulam ſumtum ponendo $s = AB = b$ erit $\frac{bbccf\,\text{cof.}\,\Phi}{4ng}$, a quo momentum ex pondere natum, quod eſt P a ſin. Φ, ablatum relinquit momentum quo tabula agitatur, quod ergo erit

$$\frac{bbccf\,\text{cof.}\,\Phi}{4ng} - Pa\,\text{fin.}\,\Phi$$

vnde conficitur, ſi per $\frac{2g}{Pkk}$ multiplicemus, aequatio pro acceleratione motus, quae erit

$$\frac{\partial\partial\Phi}{\partial t^2} = \frac{bbccf\,\text{cof.}\,\Phi}{2nPkk} - \frac{2ga\,\text{fin.}\,\Phi}{kk},$$

quae ab aequatione ſuperioris hypotheſis pro eodem caſu tantum in eo diſcrepat, quod hic ſolus coſ. Φ adſit, cum ibi eius quadratum adeſſet.

§. 27.

§. 27. Iam ad motum oſcillatorium tabulae indagandum conſiderari oportet ſtatum aequilibrii, in quem ventus tabulam redigere valet. Sit igitur pro ſtatu aequilibrii angulus $OAB = \zeta$, vnde, cum acceleratio euaneſcere debeat, fiet

$$\frac{bbccf\,\text{coſ.}\,\zeta}{2n} - 2gaP\,\text{ſin.}\,\zeta = 0,$$

ex qua aequatione angulus ζ facillime colligitur; reperitur enim $\text{tang.}\,\zeta = \frac{bbccf}{4gnaP}$. Sin autem vt ante angulum ζ in calculo retinere velimus, pro celeritate venti inueniemus

$$cc = \frac{4gnaP\,\text{tang.}\,\zeta}{bbf}.$$

§. 28. Ponamus nunc tabulam de hoc ſtatu paulisper deturbari, eamque tempore $= t$ perueniſſe in ſitum Ab, exiſtente angulo $Bab = \omega$, erit $\Phi = \zeta + \omega$, et ob ω angulum minimum habebitur

$$\text{ſin.}\,\Phi = \text{ſin.}\,\zeta + \omega\,\text{coſ.}\,\zeta, \text{ et } \text{coſ.}\,\Phi = \text{coſ.}\,\zeta - \omega\,\text{ſin.}\,\zeta,$$

Hinc igitur aequatio pro motu erit

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = + \frac{bbccf\,\text{coſ.}\,\zeta}{2nPkk} - \frac{bbccf\omega\,\text{ſin.}\,\zeta}{2nPkk} - \frac{2ga\,\text{ſin.}\,\zeta}{kk} - \frac{2ga\omega\,\text{coſ.}\,\zeta}{kk}$$

quae ob $\frac{bbccf\,\text{coſ.}\,\zeta}{2n} - 2gaP\,\text{ſin.}\,\zeta = 0$ (per hypotheſin) reducitur ad hanc:

$$\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = - \frac{bbccf\omega\,\text{ſin.}\,\zeta}{2nPkk} - \frac{2gaa\,\text{coſ.}\,\zeta}{kk},$$

quae poſito pro ω valore inuento redigitur ad hanc ſpeciem ſimpliciſſimam $\frac{\partial\partial\omega}{\partial t^2} = - \frac{2ga\omega}{kk\,\text{coſ.}\,\zeta}$, vnde ſtatim patet longitudinem penduli ſimplicis iſochroni eſſe $= \frac{kk\,\text{coſ.}\,\zeta}{a}$.

§. 29. Multiplicemus hanc aequationem per $2\partial\omega$ et integrando fiet

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial t^2} = \frac{2ga}{kk\,\text{coſ.}\,\zeta}(\alpha\alpha - \omega\omega),$$

hincque porro $\frac{\partial t}{k}\sqrt{\frac{2ga}{\text{coſ.}\,\zeta}} = \frac{\partial\omega}{\sqrt{(\alpha\alpha - \omega\omega)}}$, cuius integrale praebet

$\frac{t}{k}\sqrt{\frac{2ga}{cof.\zeta}} = A$ fin. $\frac{\omega}{\alpha}$, ideoque $\omega = \alpha$ fin. $\frac{t}{k}\sqrt{\frac{2ga}{cof.\zeta}}$. Ex aequatione autem differentiali patet, tabulam ad quietem redigi seu fieri $\frac{\partial\omega}{\partial t} = 0$, vbi fit $\omega = \alpha$; tum autem erit tempus

$$t = \frac{\pi k}{2}\sqrt{\frac{cof.\zeta}{2ga}}.$$

Hoc autem tempore absoluitur dimidia oscillatio, vnde tempus integrae oscillationis prodit $= \pi k\sqrt{\frac{cof.\zeta}{2ga}}$.

§. 30. Comparemus nunc istud tempus cuiusque oscillationis cum eo quod in prima hypothesi inuenimus, quod cum fuisset $\pi k\sqrt{\frac{cof.\zeta}{2ga(1+fin.\zeta^2)}}$, patet praesens tempus ad praecedens se habere vt $1 : \frac{1}{\sqrt{(1+fin.\zeta^2)}}$, hoc est vt $\sqrt{(1+fin.\zeta^2)} : 1$, vnde patet praesenti casu oscillationes fore tardiores quam in hypothesi praecedente, si quidem angulus ζ simulque ipsa tabula vtrinque fuerit eadem. Hinc igitur per experimenta explorari poterit, vtra harum hypothesium veritati sit consentanea.

§. 31. Tribuamus igitur vt ante tabulae crassitiem vniformem $= d$, eritque eius altitudo $b = 2a$ et $k = \frac{2a}{\sqrt{3}}$, manente semi-latitudine $= f$. His positis pro hypothesi prima erit tempus vnius oscillationis $= \pi\sqrt{\frac{2a\,cof.\zeta}{3g(1+fin.\zeta^2)}}$, pro posteriore vero hypothesi hoc tempus erit $= \pi\sqrt{\frac{2a\,cof.\zeta}{3g}}$. Ponamus iam altitudinem tabulae $2a$ aequalem esse $\frac{1}{3}g$, siue trienti altitudinis g, per quam grauia vno minuto secundo delabuntur, ac pro hypothesi prima erit tempus vnius oscillationis

$$= \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{cof.\zeta}{(1+fin.\zeta^2)}} = 1,0471975\sqrt{\frac{cof.\zeta}{1+fin.\zeta^2}},$$

pro posteriore autem hypothesi erit hoc tempus

$$= \frac{1}{3}\pi\sqrt{cof.\zeta} = 1,0471975\sqrt{cof.\zeta}.$$

Quod si ergo pro statu aequilibrii fuerit $\zeta = 45°$, tempus vnius oscil-

oscillationis pro hypothesi priore erit $\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{3}} = 0,71899$ min. sec., pro altera autem hypothesi erit hoc tempus

$$= 1,04719 \cdot \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,88059.$$

Vnde patet, per experimenta facile decidi posse, vtra hypothesis cum veritate conueniat.

§. 32. Talia experimenta autem facillime institui poterunt, propterea quod neque celeritatem venti nosse necesse est, neque pondus tabulae, eiusue grauitatem specificam, dummodo tabula fuerit rectangularis et vbique habeat eandem crassitiem; neque etiam latitudo tabulae in computum ingreditur. Ponamus igitur huiusmodi tabulam adhiberi, cuius altitudo AB sit $= \frac{1}{3}g$, hoc est $= 5,208$ ped. Rhenan., quae ex axe horizontali suspensa vento directe exponatur, et quaeratur eius situs aequilibrii, qui a situ verticali declinet angulo ζ, cuius quantitas accurate mensuretur. Deinde tabula in hoc situ ad motum oscillatorium incitetur, et numerus vibrationum certo tempore editarum diligenter notetur, vt inde innotescat tempus vnius oscillationis, quod sit $= \theta$ min. sec.; quo inuento exploretur, vtrum sit $\theta = \frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{cof.\,\zeta}{1 + fin.\,\zeta^2}}$, an vero $\theta = \frac{1}{3}\pi\sqrt{cof.\,\zeta}$; priore enim casu hypothesis prior, posteriore vero hypothesis altera veritati consentanea pronunciari debebit. Hicque modus tutissimus videtur ad quaestionem de vera aestimatione vis venti decidendam, id quod alioquin plurima elementa postularet, de quorum veris mensuris nunquam satis certos esse liceret.

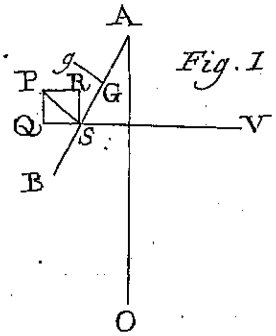

Fig. 1.

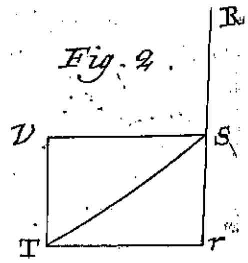

Fig. 2.

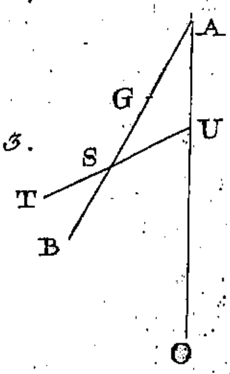

Fig. 3.

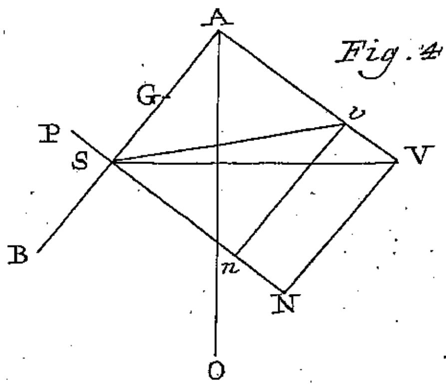

Fig. 4.

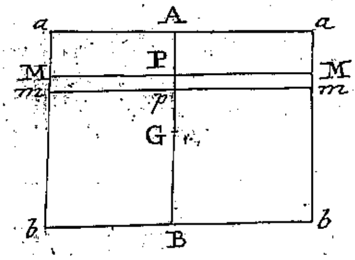

Fig. 5.

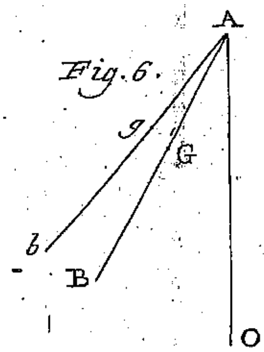

Fig. 6.

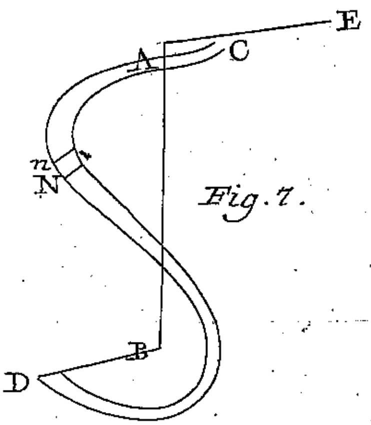

Fig. 7.

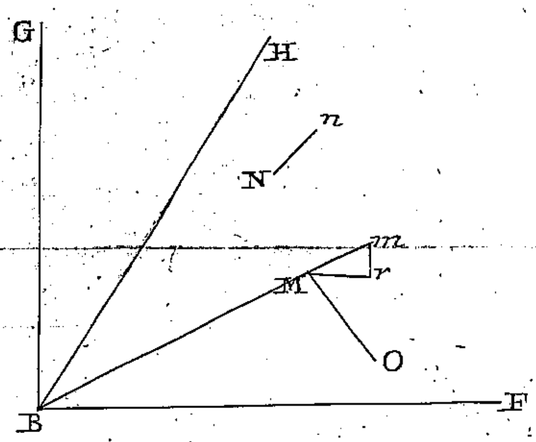

Fig. 8.